Extensions of tensor products of the VOA $V^{hat{sigma}}_{sqrt{2}A_{n}}$ (Aspects of Combinatorial Representaion Theory)

AUTHOR(S):

安部, 利之

数理解析研究所講究録 第2127巻 2019年 140-146

Extensions of tensor products of the VOA $V_{\sqrt{2}A_n}^{\hat{\sigma}}$

安部利之（愛媛大学教育学部）

1 序

ムーンシャイン頂点作用素代数 $V^\natural$ はその指標が楕円モジュラー関数のフーリエ展開でありとその自己同型群が散在型有限単純群のうち位数が最大であるモンスター群である頂点作用素代数である ([FLM], [H], [G]). その構成以来, モンスター単純群の構造を $V^\natural$ やその部分頂点作用素代数を経由することで見通しよく解析する方法が研究されてきた. 特にモンスター単純群の可換部分群は, $V^\natural$ を C_2-余有限, 有理的頂点作用素部分代数 U の単純カレント拡大としてとらえることに対応し, その可換部分群の正規化部分群が U の自己同型群としてとらえられることから U の構造からその正規化部分群の構造を調べる情報を得ることができることが期待される. この観点からは U がどの様な部分頂点作用素代数として現れるのかが問題となる.

この問題へのアプローチとして, リーチ格子 Λ を経由した $V^\natural$ の構成がこれまで主に研究されている (cf. [CLS] 及びその中の参考文献). $V^\natural$ の構成では, まず階数 24 のユニモジュラー偶格子の一つであるリーチ格子 Λ に付随して格子頂点作用素代数 V_Λ を構成し, 次に Λ の -1-対合 θ を持ち上げて得られる自己同型 $\hat{\theta}$ による固定点部分頂点作用素代数 (オービフォールド模型) $V_\Lambda^{\langle\hat{\theta}\rangle}$ と $\hat{\theta}$-twisted 加群 $V_\Lambda^{T,\hat{\theta}}$ における整数重みの部分 $(V_\Lambda^{T,\hat{\theta}})_{\mathbb{Z}}$ を考える. このとき $V^\natural = V_\Lambda^{\langle\hat{\theta}\rangle} \oplus (V_\Lambda^{T,\hat{\theta}})_{\mathbb{Z}}$ に $V_\Lambda^{\langle\hat{\theta}\rangle}$ の拡大となるような頂点作用素代数の構造を入れる. この構成方法は $\mathbb{Z}_2$-オービフォールド構成と呼ばれ, 現在では Λ の非自明な固定点を持たない素数位数 p の isometory による $\mathbb{Z}_p$-オービフォールド構成も得られている ([ALY1]).

p を $(p-1)|24$ を満たす素数としたとき, リーチ格子 Λ は同階数の部分格子として $\sqrt{2}A_{p-1}^{24/(p-1)}$ を含んでいる. ここで A_n は A_n 型のルート格子を表す. 更に, σ を A_{p-1} の isometry で $S_p \cong O(A_{p-1})$ の p-サイクルに対応するものとすると, σ の $\sqrt{2}A_{p-1}^{24/(p-1)}$ への対角作用は自然に位数 p の isometry を与える. そしてそれは Λ の位数 p の非自明な固定点を持たない isometry σ に持ち上げることができる. 更に Λ の isometry σ は V_Λ の位数 p の自己同型 $\hat{\sigma}$ に持ち上がり, $\mathbb{Z}_p$-orbifold 構成を経由して, $V^\natural$ の自己同型, つまりモンスター群の元を与える. こうして得られるモンスター群の元は pB-元と呼ばれるものになる.

本報告では, 埋め込み $\sqrt{2}A_{p-1}^{24/(p-1)} \subset \Lambda$ によって $V_{\sqrt{2}A_{p-1}^{24/(p-1)}}$ の拡大として V_Λ をとらえることから始める. そして任意の $V_{\sqrt{2}A_{p-1}^{24/(p-1)}}^{\hat{\sigma}}$ の拡大は常に単純カレント拡大であることの解説を行う. 特に $V^\natural$ は $V_{\sqrt{2}A_{p-1}^{24/(p-1)}}^{\hat{\sigma}}$ の単純カレント拡大である. 実際は n を偶数とし, $V_{\sqrt{2}A_n^d}^{\hat{\sigma}}$ の拡大として得られる頂点作用素代数を符号を援用して描写する. そして $p=n+1$ が素数の時には特にその拡大が常に単純カレント

拡大となることについて解説する.

本研究は ChingHung Lam 氏, 山田祐理氏との共同研究であり, [ALY2] に掲載されている論文の概説でもある. 講演の機会を与えて下さった筑波大学の佐垣氏にはこの場を借りてお礼申し上げる.

2 A-型ルート格子と符号

正の整数 n に対し, 表記 A_n は A_n-型ルート格子も表すとする. 定義より, A_n は自由基底 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ でそれらの内積が

$$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \begin{cases} 2 & \text{if } i = j, \\ -1 & \text{if } |i-j| = 1, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$(i = 1, \cdots, n)$ で与えられるものを持つ. 便宜上 $\alpha_{n+1} = -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ とおき, α の添え字は $\mathbb{Z}_{n+1} = \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ に属するものとみなす. A_n には $\sigma(\alpha_i) = \alpha_{i+1}$ によって定まる isometry $\sigma \in O(A_n)$ が存在する. ここで $O(L)$ は格子 L の内積を保つ加法的自己同型 (isometry) 全体のなす群である. σ は位数 $n+1$ である.

以下 $p = n+1$ とする. $N = \sqrt{2}A_{p-1}$ とおき, $\beta_i = \sqrt{2}\alpha_i$ と定める. N° を N の双対格子とすれば, N° には $\frac{1}{2}\beta_i$ $(i = 1, \cdots, p-1)$ の生成する部分格子 $\frac{1}{2}N$ がとれるが, $\frac{1}{2}N$ には属さない

$$\gamma = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p-1} i\beta_i$$

も存在する. $p\gamma \in N$ であるが, p が奇数の時には

$$N^\circ = \langle \frac{1}{2}N, \gamma \rangle_{\mathbb{Z}}$$

が成り立つ. 特に

$$N^\circ/N = \langle \frac{1}{2}\beta_1 + N, \cdots, \frac{1}{2}\beta_{p-1} + N \rangle_{\mathbb{Z}} \times \langle \gamma + N \rangle \cong \mathbb{Z}_2^{p-1} \times \mathbb{Z}_p$$

となっている. 実際に

$$\mathbb{Z}^{p-1} \times \mathbb{Z} \to N^\circ, \quad (u, a) \mapsto \beta_{u,a} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p-1} u_i\beta_i + a\gamma$$

が同型を誘導する. ここで $u = (u_1, \cdots, u_{p-1}) \in \mathbb{Z}^{p-1}$ である.

以下 p は奇数とする. このとき, 格子 N° の構造を用いて, $\mathbb{Z}_2^{p-1} \times \mathbb{Z}_p$ に次のように符号の構造が入る. まず内積は

$$(\overline{u}, \overline{a}) \cdot (\overline{v}, \overline{b}) = (\overline{u} \cdot \overline{v}, \overline{a} \cdot \overline{b}) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_p$$

で定める．ただし

$$\overline{u}\cdot\overline{v}=2\langle\beta_{u,0},\beta_{v,0}\rangle+\mathbb{Z}_2,\quad \overline{a}\cdot\overline{b}=p\langle\beta_{0,a},\beta_{0,b}\rangle+\mathbb{Z}_p$$

と定めた．また重み関数 $w:\mathbb{Z}_2^{p-1}\times\mathbb{Z}_p\to\mathbb{Z}$ は

$$w(\overline{u},\overline{a})=\min\{\langle\beta,\beta\rangle\,|\,\beta\in\beta_{u,a}+N\}$$

によって定める．この符号の構造を $\mathbb{Z}_2^{p-1}$ に制限した部分符号を k, $\mathbb{Z}_p$ に制限した部分符号を l と表すことにする．更に正の整数 d に対し, 直積 $(k\times l)^d\cong k^d\times l^d$ は $k\times l$ の符号構造を成分ごとに考えた符号とみなすことができる．

注意 2.1. 二元符号 k の重み関数を $w/2$ に取り換えると, 長さ p の単一パリティ符号に通常のハミング重みを考えたものに同型となることがわかる．

$\mathcal{E},\mathcal{C},\mathcal{D}$ をそれぞれ $(k\times l)^d$, k^d, l^d の部分符号とする．このとき

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^{\perp}&=\{(\overline{\boldsymbol{u}},\overline{\boldsymbol{a}})\in k\times l|(\overline{\boldsymbol{u}},\overline{\boldsymbol{a}})\cdot\mathcal{E}=\{0\}\},\\ \mathcal{C}^{\perp}&=\{\overline{\boldsymbol{u}}\in k^d|\overline{\boldsymbol{u}}\cdot\mathcal{C}=\{0\}\},\\ \mathcal{D}^{\perp}&=\{\overline{\boldsymbol{a}}\in l^d|\overline{\boldsymbol{a}}\cdot\mathcal{C}=\{0\}\}\end{aligned}$$

とそれぞれの双対符号を定める．

任意の部分符号 $\mathcal{E}\subset(k\times l)^d$ に対し,

$$L_{\mathcal{E}}=\bigcup_{(\overline{\boldsymbol{u}},\overline{\boldsymbol{a}})\in\mathcal{E}}(\beta(\overline{u},\overline{a})+N^d)\subset(N^{\circ})^d$$

とおく．ここで $\beta(\overline{u},\overline{a})=(\beta(u^1,a_1),\cdots,\beta(u^d,a_d))$ $(u^i\in\mathbb{Z}^{p-1},\ a_i\in\mathbb{Z})$ とおき, $(\overline{\boldsymbol{u}},\overline{\boldsymbol{a}})$ は $(\overline{u},\overline{a})$ の $k^d\times l^d$ における標準射影の像である．このとき $L_{\mathcal{E}}$ は N^d を含む $(N^{\circ})^d$ の部分格子であり, $[L_{\mathcal{E}}:N^d]=|\mathcal{E}|$ である．また

$$(L_{\mathcal{E}})^{\circ}=L_{\mathcal{E}^{\perp}}$$

が成立することもわかる．

命題 2.2. 部分符号 $\mathcal{E}\subset(k\times l)^d$ に対し, 次が成り立つ．

(1) $L_{\mathcal{E}}$ が整 $\Leftrightarrow\mathcal{E}\subset\mathcal{E}^{\perp}$.

(2) $L_{\mathcal{E}}$ が偶 $\Leftrightarrow w(\mathcal{E})\subset2\mathbb{Z}$.

(3) $L_{\mathcal{E}}$ が unimodular $\Leftrightarrow\mathcal{E}^{\perp}=\mathcal{E}$.

このように符号の性質によって対応する格子の性質がわかる．以下, $w(\mathcal{E})\subset2\mathbb{Z}$ が成り立つとき $\mathcal{E}$ は偶であると呼ぶことにする．

2.1 σ の持ち上げ

N の isometry σ を思い出そう. σ は N° にも作用するので, $(N^\circ)^d$ にも対角に作用する. この作用も σ と表すと, σ は N^d および $(N^\circ)^d$ の isometry と考えることができる. 従って剰余 $k^d \times l^d \cong (N^\circ)^d/N^d$ にも作用する. この作用を $\overline{\sigma}$ と書くことにする. 定義より, $\overline{\sigma}$ は k^d 及び l^d を保つが, 実際に k^d には非自明な固定点をもたず, 対照的に l^d には自明に作用する.

今 $\mathcal{E} \subset k^d \times l^d$ を部分符号とする. このとき p は奇数なので, k^d, l^d の部分符号 $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ が一意に存在し, $\mathcal{E} = \mathcal{C} \times \mathcal{D}$ が成り立つ. $\overline{\sigma}$ は $\mathcal{D}$ に自明に作用するので, $\mathcal{E}$ が $\overline{\sigma}$ 不変であるための必要十分条件は $\mathcal{C}$ が $\overline{\sigma}$ 不変であることである.

命題 2.3. $\mathcal{C}$ が $\overline{\sigma}$ 不変な k^d の部分符号とする. このとき, l^d の任意の部分符号 $\mathcal{D}$ に対し, N^d の isometry σ は $L_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}$ の isometry に一意的に持ち上げることができる.

例 2.4. $p = 5$ の場合に関し, リーチ格子 Λ に N^6 が含まれている. このことは, A_4^6 をルート系にもつ Niemeier 格子 $N(A_4^6)$ 及び E_8^3 をルート系に含む Niemeier 格子 $N(E_8^3)$ が存在し, Λ がそれらの $\sqrt{2}$ 倍と同型は部分格子を含むことよりわかる (例えば [CS] 参照). これは $L_{\mathcal{E}} = \Lambda$ を満たす符号 $\mathcal{E} \subset k^6 \times l^6$ が存在することを意味している. 実際にのような符号で $\overline{\sigma}$ 不変なものが具体的に構成でき, σ は Λ の isometry として持ち上げることができる. その位数は 5 であり, 非自明な固定点を持たない.

3 頂点作用素代数 $V_{L_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}}^{\widehat{\sigma}}$

この節では頂点作用素代数の一般論を引用しながら, 我々の主結果を述べる. 以下, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ をそれぞれ k^d, l^d の自己双対, 偶部分符号とする. このとき $L = L_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}$ は正定値偶格子となるので, 頂点作用素代数 V_L が得られる ([FLM]).

正定値偶格子 L に付随する格子頂点作用素代数 V_L の表現論は非常によく研究されている. まず既約 V_L-加群は剰余類 $\lambda + L \in L^\circ/L$ によってパラメトライズされる ([D]). $\lambda + L \in L^\circ/L$ に対応する既約加群を $V_{\lambda+L}$ と表す. 今, σ を位数 p の L の isometry とすると, σ は V_L の自己同型 $\widehat{\sigma}$ に持ち上げることができる. 持ち上げは一般に複数存在するが, (今我々の考えたい設定である) 奇数 p では 持ち上げ $\widehat{\sigma}$ が位数 p を持つようにできる. この持ち上げとしては標準持ち上げ (cf. [Mö]) と呼ばれるものがあり, ここでは標準持ち上げを $\widehat{\sigma}$ とする.

このとき, 任意の $i = 0, 1, \cdots, p-1$ に対し, [DL2] に従い, $\widehat{\sigma}^i$-twisted 加群と呼ばれるものが構成される. その既約なものの構成に関してもここでは詳しくは述べないが, V_L の部分頂点作用素代数として現れる $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} L$ に付随する中心電荷 $\mathrm{rank}(L)$ の自由ボゾン頂点作用素代数 $M(1)$ の $\widehat{\sigma}^i$-twisted 加群 $M(1)(\widehat{\sigma}^i)$ とある twisted 群環 $\mathbb{C}_\varepsilon[L]$ の既約加群 T のテンソル積 $V_L^T = M(1)(\widehat{\sigma}^i) \otimes T$ として構成される. ここで重要な事実として, $\widehat{\sigma}^i$-twisted 加群はオービフォールド模型 $V_L^{\widehat{\sigma}}$ の完

全可約な加群となっていることである. [Mi] および [CM] により, $V_L^{\hat{\sigma}}$ は C_2-余有限, 有理的頂点作用素代数となり, この場合には [DRX] の量子次元を用いた議論により, 任意の既約な $V_L^{\hat{\sigma}}$-加群は既約な $\hat{\sigma}^i$-twisted 加群の既約因子のいずれかに同型であるという結果が知られている.

一方, 格子頂点作用素代数 V_L については, 既約加群の間の fusion 則 ([FHL]) もよく知られており,

$$V_{\lambda+L} \boxtimes V_{\mu+L} \cong V_{\lambda+\mu+L}, \quad \lambda, \mu \in L^\circ$$

が成り立つ ([DL]). ここで $\boxtimes$ は fusion 積を表しており, ベクトル空間のテンソル積に似た普遍性を用いて定義される. このように V_L は「任意の既約加群 (の同型類) のなす集合 $\mathrm{Irr}\,(V_L)$ は fusion 積に関し閉じている」という性質をもつことがわかる. 更に V_L は fusion 積に関する単位元であり, $V_{\lambda+L}$ は逆元 $V_{-\lambda+L}$ を持つ. このように $\mathrm{Irr}\,(V_L)$ は fusoin 積に関し可換群をなしている. 特に群として $\mathrm{Irr}\,(V_L) \cong L^\circ/L$ である.

C_2-余有限, 有理的頂点作用素代数 V は $\mathrm{Irr}\,(V)$ が fusion 積に関し群をなすとき, **group-like fusion** を持つという. 定義より, 任意の既約 V-加群は fusion 積によって既約加群を既約加群に移す (このような既約加群は**単純カレント** と呼ばれる).

本来は既約 $V_L^{\hat{\sigma}}$-加群の間の fusion 則を決定したいのだが, 現在のところまだ完全に決定されてはいない. しかし単純カレントであることと量子次元が 1 であることが同値であるという結果 ([DJX]) を用いると, 上記の具体的な構成から量子次元を計算することで既約な $V_L^{\hat{\sigma}}$-加群がいつ単純カレントになるかがわかる. その結果, 次の定理を得た.

定理 3.1. p を奇素数, $\mathcal{C}$ が自己双対 $\overline{\sigma}$-不変な k^d の偶部分符号とし, $\mathcal{D}$ を l^d の偶部分符号とする. このとき, $L = L_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}$ に対し, $V_L^{\hat{\sigma}}$ は group-like fusion を持つ.

更に [EMS] の結果を用いると, $\mathrm{Irr}\,(V_L^{\hat{\sigma}})$ の群としての構造もわかる.

定理 3.2. $p, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ を定理 3.1 のものとし, $p = 3$ の場合 $3|d$ を仮定する. このとき, $\mathrm{Irr}\,(V_L^{\hat{\sigma}})$ は基本アーベル群 $\mathbb{Z}_p^{d-2s+2}$ に同型である. ここで $|\mathcal{D}| = p^s$ である.

4 応用

ここでは $p = 3, 5, 7, 13$ とし, $\Lambda = L_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}$ を満たす自己双対偶部分符号 $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ で σ-不変なものを考える. Λ の階数は 24 なので, $d = 24/(p-1)$ である. $V^\natural$ は $V_\Lambda^{\hat{\sigma}}$ を含んでおり, $V_\Lambda^{\hat{\sigma}}$ は $V_{L_{\mathcal{C}\times 0}}^{\hat{\sigma}}$ を含んでいるので, $V^\natural$ は $V_{L_{\mathcal{C}\times 0}}^{\hat{\sigma}}$ の拡大となっている. 定理 3.1 より, $V_{L_{\mathcal{C}\times 0}}^{\hat{\sigma}}$ は goup-like fusion をもつので, この拡大は単純カレント拡大となっている. $\Lambda/L_{\mathcal{C}\times 0} \cong \mathcal{D}$ で, $V^\natural$ は V_Λ の Z_p-オービフォールド構成で得られるの

で, $\mathrm{Irr}\,(V_{L_{\mathcal{C}\times 0}}^{\widehat{\sigma}})$ の部分群 D とその指数 p の部分群 $D_0 \cong \mathcal{D}$ が存在して,

$$V_{\Lambda}^{\widehat{\sigma}} = \oplus_{a\in D_0} W_a,$$
$$V^{\natural} = \oplus_{a\in D} W_a, \quad W_a \in \mathrm{Irr}\,(V_{L_{\mathcal{C}\times 0}}^{\widehat{\sigma}})$$

となるものが存在する. W の添え字と D の関係は D の演算を加法表記すれば, $W_a \boxtimes W_b \cong W_{a+b}$ で与えられる. 定理 3.2 より, $\mathrm{Irr}\,(V_{L_{\mathcal{C}\times 0}}^{\widehat{\sigma}}) \cong \mathbb{Z}_p^{24/(p-1)+2}$ であり, D はその部分群なので基本アーベル群で, 拡大の仕方に注意すれば, $|D| = p \times |D_0| = p \times |\mathcal{D}| = p^{1+12/(p-1)}$ なので, $D \cong \mathbb{Z}_p^{(p+11)/(p-1)}$ となる. この基本アーベル p-群 D はモンスター群 $\mathrm{Aut}(V^{\natural})$ の部分群である. モンスター群の共役類は [ATLAS] に与えられているが, D の生成元がどの共役類に属するのかについては現在解析中である.

参考文献

[ATLAS] J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker and R.A. Wilson, *Atlas of finite groups*, Oxford University Press, Oxford, 1985.

[ALY1] T. Abe, C.-H. Lam, H. Yamada, On $\mathbb{Z}_p$-orbifold constructions of the Moonshine vertex operator algebra, *Math. Z.*, **290**, no. 1-2, 683– 697 (2018).

[ALY2] T. Abe, C.-H. Lam, H. Yamada, Extensions of tensor products of $\mathbb{Z}_p$-orbifold models of the lattice vertex operator algebra $V_{\sqrt{2}A_{p-1}}$, *J. Algebra*, **510**, 24–51 (2018).

[CLS] H.-Y. Chen, C.-H. Lam and H. Shimakura, On $\mathbb{Z}_3$-orbifold construction of the Moonshine vertex operator algebra, *Math. Z.*, **288**, 75–100 (2018).

[CM] S. Carnahan and M. Miyamoto, Rationality of fixed-point vertex operator algebras, arXiv:1603.05645v1.

[CS] J.H. Conway and N.J.A. Sloane, *Sphere Packings, Lattices and Groups*, Springer 1999.

[D] C. Dong, Vertex algebras associated with even lattices, *J. Algebra*, **161**, no. 1, 245–265 (1993).

[DJX] C. Dong, X. Jiao and F. Xu, Quantum dimensions and quantum Galois theory, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **365**, no. 12, 6441–6469 (2013).

[DL] C. Dong and J. Lepowsky, *Generalized vertex algebras and relative vertex operators*, Progress in Mathematics, **vol. 112**, Birkhauser Boston Inc., Boston, MA, (1993).

[DL2] C. Dong and J. Lepowsky, The algebraic structure of relative twisted vertex operators, *J. Pure, Appl. Math.*, **110**, 259–295 (1996).

[DRX] C. Dong, L. Ren and F. Xu, On orbifold theory, *Adv. Math.*, **321**, 1–30 (2017).

[EMS] J. van Ekeren, S. Möller and N. Scheithauer, Construction and classification of holomorphic vertex operator algebras, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, (2017).

[FHL] I. Frenkel, Y.-Z. Huang and J. Lepowsky, On axiomatic approaches to vertex operator algebras and modules, *Mem. Amer. Math. Soc.* **104**, (1993).

[FLM] I. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, *Vertex Operator Algebras and the Monster*, Pure and Appl. Math., Vol. **134**, Academic Press, Boston, 1988.

[G] T. Gannon, *Moonshine beyond the Monster*, The bridge connecting algebra, modular forms and physics, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, Cambridge 2006.

[H] 原田耕一郎, モンスター – 群のひろがり, 岩波書店, 1999.

[Mi] M. Miyamoto, C_2-cofiniteness of cyclic-orbifold models, *Commun. Math. Phys.*, **335**, No. 3, 1279–1286 (2015).

[Mö] S. Möller, A Cyclic Orbifold Theory for Holomorphic Vertex Operator Algebras and Applications, arXiv:1611.09843, Ph. D. Thesis. (2016).